

MINIMISATION DE FONCTIONNELLES NON DIFFERENTIABLES

(Exodus 16:18) וימדו בעמר ולא העדיף המרבה והממעיט לא החסיר

PAR
M. SIBONY

ABSTRACT

Approximation of certain functionals which are not differentiable in the sense of Gateau by differentiable ones is utilized for solving a large class of optimization problems. Some examples from mechanics are included.

Introduction. Dans ce travail on se propose d'étudier le problème de la minimisation d'une fonctionnelle sur un convexe fermé d'un espace de Banach réflexif.

Nous avons introduit dans [9] et [10] de nombreux procédés permettant d'approcher numériquement la solution du problème dans le cas où la fonctionnelle est différentiable.

Ici nous allons approcher le problème (P) de la minimisation d'une fonctionnelle non différentiable par un problème (P_ε) (ε étant un paramètre destiné à tendre vers 0) pour lequel la fonctionnelle est "régularisée". Nous montrerons que la solution du problème (P_ε) converge vers la solution du problème (P) quand $\varepsilon \rightarrow 0$. Il suffira alors pour résoudre le problème (P_ε) d'appliquer les méthodes que nous avons introduites dans [9] et [10].

Nous appliquerons ensuite ces résultats à quelques problèmes pratiques empruntés à la Mécanique.

Notre plan est le suivant:

- 1) Position du problème et notations.
- 2) Régularisation d'une fonctionnelle non différentiable.
- 3) Application I: résolution numérique d'un problème de filtre optimal.
- 4) Application II: résolution numérique d'un problème de Visco-élasticité.
- 5) Minimisation de fonctionnelle: une méthode directe.
- 6) Applications Numériques:

EXAMPLE 1. Résolution numérique d'un problème de Visco-élasticité.

EXAMPLE 2. Résolution numérique d'un problème de programmation dynamique.
Je remercie H. Brezis pour ses conseils amicaux.

1. Position du problème et notations. Soit V un espace de Banach sur \mathbb{R} , réflexif de norme $\| \cdot \|$. On note par V' son dual muni de la norme $\| \cdot \|'$. On désigne par (f, u) , $f \in V'$, $u \in V$ la dualité entre V' et V .

Soit X un convexe fermé de V . On se donne une application $J: X \rightarrow]-\infty, +\infty]$ non identique à $+\infty$. On fait les hypothèses suivantes:

$\alpha 1)$ J est semi-continu inférieurement (s.c.i.) pour la topologie faible induite par $\sigma(V, V')$

$\alpha 2)$ J est strictement convexe et vérifie

$$\lim_{\substack{\|u\| \rightarrow +\infty \\ u \in X}} J(u) = +\infty$$

$\alpha 3)$ J est dérivable au sens de Gateaux. On note par J' la dérivée de J si elle existe.

Nous avons alors le

THÉORÈME 1.1. (cf. M. Sibony [9], [11])

1) Si on suppose $\alpha 1)$, $\alpha 2)$ alors, il existe $u \in X$ unique solution du problème

$$(1.1) \quad J(u) \leq J(v) \quad \forall v \in X$$

2) Si de plus on suppose $\alpha 3)$ alors, toute solution de (1.1) est solution de l'inégalité

$$(1.2) \quad (J'u, v - u) \geq 0 \quad \forall v \in X$$

et réciproquement.

REMARQUE 1.1.

1) On démontre facilement que si J est dérivable au sens de Gateaux alors les deux assertions suivantes sont équivalentes:

- i) J est strictement convexe
- ii) J est convexe et J' est strictement monotone

$$(i.e.) \quad (J'u - J'v, u - v) > 0 \quad \forall u, v \in X \quad u \neq v.$$

2) On montre que si J est s.c.i., et convexe alors J est s.c.i. pour la topologie faible induite par $\sigma(V, V')$.

2. Régularisation d'une fonctionnelle non différentiable. Le problème (1.1) ne se ramène à (1.2) que si la fonctionnelle J est différentiable au sens de Gateaux. On se propose maintenant de remplacer (1.1) par le problème

$$(2.1) \quad J_\varepsilon(u_\varepsilon) \leq J_\varepsilon(v) \quad \forall v \in X$$

(où J_ε est une fonctionnelle différentiable) de sorte que $u_\varepsilon \in X$ solution de (2.1) converge quand $\varepsilon \rightarrow 0$ vers $u \in X$ solution de (1.1).

Le problème (2.1) sera alors équivalent à l'inégalité variationnelle non linéaire

$$(2.2) \quad (J'u_\varepsilon, v - u) \geq 0 \quad \forall v \in X$$

que nous savons résoudre à l'aide des méthodes introduites dans [9] et [10]. \square

Auparavant nous démontrons deux lemmes

Soit $\varepsilon > 0$ un paramètre destiné à tendre vers 0. On fait les hypothèses suivantes:

$\beta 1)$ G, H, H_ε sont des fonctionnelles sur X (s.c.i.).

On suppose

- $H \geq 0, H_\varepsilon \geq 0$ avec H, H_ε convexes
- G strictement convexe et $\lim_{\substack{\|u\| \rightarrow \infty \\ u \in X}} G(u) = +\infty$

$\beta 2)$ La condition: $u_\varepsilon \rightarrow \xi$ faiblement suivant un ultrafiltre \mathcal{U} entraîne

$$\liminf_{\mathcal{U}} H_\varepsilon(u_\varepsilon) \geq H(\xi) \quad \text{et} \quad H_\varepsilon(v) \rightarrow H(v) \quad \forall v \in X$$

Nous avons alors le

LEMME 2.1. *La solution $u_\varepsilon \in X$ de*

$$(2.3) \quad G(u_\varepsilon) + H_\varepsilon(u_\varepsilon) \leq G(v) + H_\varepsilon(v) \quad \forall v \in X$$

converge faiblement vers $u \in X$ solution de

$$(2.4) \quad G(u) + H(u) \leq G(v) + H(v) \quad \forall v \in X.$$

DÉMONSTRATION. De l'hypothèse $\beta 1)$ on déduit l'existence et l'unicité de $u_\varepsilon \in X$ solution de (2.3) et de $u \in X$ solution de (2.4).

Montrons maintenant que $u_\varepsilon \rightarrow u$ dans V faible.

Nous avons successivement:

$$G(u_\varepsilon) + H_\varepsilon(u_\varepsilon) \leq G(v) + H_\varepsilon(v) \quad \forall v \in X$$

ce qui donne

$$G(u_\varepsilon) \leq G(v_0) + H_\varepsilon(v_0) \leq C^{te}$$

Donc $\|u_\varepsilon\| \leq C^{\varepsilon^e}$. Alors suivant un ultrafiltre \mathcal{U} on a $u_\varepsilon \rightarrow \xi$ faiblement. D'après $\beta 2)$ nous avons alors

$$\liminf H_\varepsilon(u_\varepsilon) \geq H(\xi) \quad \text{et} \quad H_\varepsilon(v) \rightarrow H(v) \quad \forall v \in X$$

Donc

$$G(\xi) \leq \limsup G(u_\varepsilon) \leq G(v) + \limsup H_\varepsilon(v) - \liminf H_\varepsilon(u_\varepsilon)$$

et

$$(2.5) \quad G(\xi) \leq \limsup G(u_\varepsilon) \leq G(v) + H(v) - H(\xi)$$

D'où

$$G(\xi) + H(\xi) \leq G(v) + H(v) \quad \forall v \in X$$

De l'unicité de la solution de (2.4), il résulte que $\xi = u$.

LEMME 2.2. *On suppose $\beta 1)$, $\beta 2)$ et*

$\beta 3)$ *La condition: $u_\varepsilon \rightarrow \xi$ faiblement et $G(u_\varepsilon) \rightarrow G(\xi)$ entraîne $u_\varepsilon \rightarrow \xi$ fortement. Alors la solution u_ε de (2.3) converge fortement vers u solution de (2.4) quand $\varepsilon \rightarrow 0$.*

DÉMONSTRATION. Dans (2.5) on fait $v = u$ et $\xi = u$ alors

$$G(u) \leq \limsup G(u_\varepsilon)$$

Donc $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} G(u_\varepsilon) = G(u)$. Comme $u_\varepsilon \rightarrow u$ faiblement, il résulte de $\beta 3)$ que $u_\varepsilon \rightarrow u$ fortement quand $\varepsilon \rightarrow 0$.

Des deux lemmes précédents et du Théorème 1.1. nous déduisons alors le

THÉORÈME 2.1. *Soit J une fonctionnelle sur X vérifiant $\alpha 1)$, $\alpha 2)$.*

On se donne 3 fonctionnelles G , H , H_ε avec $J = H + G$ satisfaisant les conditions $\beta 1)$, $\beta 2)$, $\beta 3)$ alors

1) *Il existe $u \in X$ unique solution de*

$$(2.6) \quad J(u) \leq J(v) \quad \forall v \in X$$

2) *$\forall \varepsilon > 0 \exists u_\varepsilon \in X$ unique solution de*

$$(2.7) \quad J_\varepsilon(u_\varepsilon) \leq J_\varepsilon(v) \quad \forall v \in X \quad \text{avec } J_\varepsilon = G + H_\varepsilon$$

3) *La solution u_ε de (2.7) converge fortement vers u solution de (2.6) quand $\varepsilon \rightarrow 0$.*

4) *Si J_ε est différentiable au sens de Gateaux alors toute solution de (2.7) est solution de (2.2) et réciproquement.*

3. Application I* : résolution numérique d'un problème de filtre optimal. Soit $V = \{v \mid v \in L^1(0, \infty), v'' \in L^2(0, \infty)\}$ les dérivées successives étant prises au sens des distributions.

Muni de la norme

$$\|v\| = (\|v\|_{L^1(0, \infty)}^2 + \|v''\|_{L^2(0, \infty)}^2)^{1/2}$$

V est un Banach réflexif.

L'ensemble

$$(3.1) \quad X = \{v \in V \mid v(0) = 0, v'(0) = 1\}$$

est un convexe fermé de V .

On se donne la fonctionnelle.

$$(3.2) \quad J(v) = \int_0^\infty |v''|^2 dx + \left(\int_0^\infty |v| dx \right)^2$$

Nous avons alors la

PROPOSITION 3.1. *Il existe $u \in X$ unique solution de*

$$(3.3) \quad J(u) \leq J(v) \quad \forall v \in X$$

où X et J sont donnés par (3.1), (3.2).

DÉMONSTRATION. J vérifie les hypothèses $\alpha 1$) et $\alpha 2$). \square

Posons maintenant

$$J = G + H$$

avec

$$G(v) = \int_0^\infty |v''|^2 dx = \|v''\|_{L^2(0, \infty)}^2$$

$$H(v) = \left(\int_0^\infty |v| dx \right)^2 = \|v\|_{L^1(0, \infty)}^2$$

$$H_\varepsilon(v) = \left(\int_0^\infty |v|^{1+\varepsilon} dx \right)^2 = \|v\|_{L^{1+\varepsilon}}^{2(1+\varepsilon)}$$

Il est évident que l'hypothèse $\beta 1$) sur la fonctionnelle G n'est pas vérifiée. Nous allons maintenant redéfinir un nouvel espace W muni d'une norme $\|\cdot\|_W$ pour laquelle l'hypothèse $\beta 1$) sur la fonctionnelle G soit vérifiée.

* Cet exemple est traité par d'autres méthodes par L.D. Bercovitz et H. Pollard dans [2].

Plus précisément soit $H^2(0, a)$, $a < +\infty$ l'espace des (classes de) fonctions $u \in L^2(0, a)$ telles que $u', u'' \in L^2(0, a)$; les dérivées étant prises au sens des distributions.

On note par $W = H_0^2(0, a)$ l'adhérence de $\mathcal{D}(0, a)$ dans $H^2(0, a)$. On montre dans J. L. Lions [6] que $H_0^2(0, a)$ coïncide avec l'espace

$$\{u \in H^2(0, a) \mid u(0) = u(a) = 0, \quad u'(0) = u'(a) = 0\}$$

Dans L. D. Bercovitz et H. Pollard [2] on montre que la solution du problème (3.3) est à support compact. Il revient alors au même de résoudre (3.3) pour $x \in (0, a)$ où a est un nombre réel fini suffisamment grand. Posons alors dans (3.1), (3.2)

$$u = \tilde{u} + g, \quad v = \tilde{v} + g^*$$

Le problème (3.3) revient à résoudre:

$$(3.4) \quad \tilde{J}(\tilde{u}) \leq \tilde{J}(\tilde{v}) \quad \forall \tilde{v} \in H_0^1(0, a)$$

avec

$$(3.5) \quad \tilde{J}(\tilde{v}) = \int_0^a |\tilde{v}'' + g''|^2 dx + \left(\int_0^a |\tilde{v} + g| dx \right)^2.$$

Posons

$$\tilde{G}(\tilde{v}) = \int_0^a |\tilde{v}'' + g''|^2 dx = \|\tilde{v}'' + g''\|_{L^2(0, a)}^2$$

$$\tilde{H}(\tilde{v}) = \left(\int_0^a |\tilde{v} + g| dx \right)^2 = \|\tilde{v} + g\|_{L^1(0, a)}^2$$

et

$$\tilde{H}_\varepsilon(\tilde{v}) = \left(\int_0^a |\tilde{v} + g|^{1+\varepsilon} dx \right) = \|\tilde{v} + g\|_{L^{1+\varepsilon}(0, a)}^{2(1+\varepsilon)}$$

on munit maintenant $H_0^2(0, a)$ de la norme $\|u\| = \left(\int_0^a |u''|^2 dx \right)^{1/2}$. Nous avons alors la

PROPOSITION 3.2. 1) Il existe $\tilde{u} \in H_0^2(0, a)$ unique solution de (3.4), (3.5).

2) $\forall \varepsilon > 0 \exists \tilde{u}_\varepsilon \in H_0^2(0, a)$ unique solution de

$$(3.6) \quad \tilde{G}(\tilde{u}_\varepsilon) + \tilde{H}_\varepsilon(\tilde{u}_\varepsilon) \leq \tilde{G}(\tilde{v}) + \tilde{H}_\varepsilon(\tilde{v}) \quad \forall \tilde{v} \in H_0^2(0, a)$$

3) On a $\tilde{u}_\varepsilon \rightarrow \tilde{u}$ fortement dans $H_0^2(0, a)$ quand $\varepsilon \rightarrow 0$.

* g étant une fonction telle que $g(0) = g(a) = 0$, $g'(0) = 1$ et $g'(a) = 0$.

DÉMONSTRATION. Les fonctionnelles $\tilde{J}(\tilde{u}) = \tilde{G}(\tilde{u}) + \tilde{H}(\tilde{u})$ et $\tilde{J}_\varepsilon(\tilde{u}) = \tilde{G}(\tilde{u}) + \tilde{H}_\varepsilon(\tilde{u})$ vérifient les hypothèses $\alpha 1)$, $\alpha 2)$.

De même \tilde{G} , \tilde{H} , \tilde{H}_ε vérifient l'hypothèse $\beta 1)$.

Vérifions maintenant l'hypothèse $\beta 2)$. Nous avons en effet:

$$g_\varepsilon = |f|^{1+\varepsilon} \rightarrow |f| \text{ quand } \varepsilon \rightarrow 0$$

$$|g_\varepsilon| \leq \max(|f|^2, 1).$$

Donc

$$\left(\int_0^a |f|^{1+\varepsilon} dx \right)^2 \rightarrow \left(\int_0^a |f| dx \right)^2$$

d'après un théorème de Lebesgue. Par ailleurs on démontre l'inégalité suivante:

Pour $\alpha > 0$ on a:

$$(3.7) \quad \alpha^{1+\varepsilon} \geq \alpha - \frac{\varepsilon}{e}$$

où e est la base du Logarithme népérien. En effet pour $\alpha > 1$ la formule est évidente. Pour $\alpha < 1$ on a:

$$\alpha^{1+\varepsilon} = \alpha(1 + \varepsilon \text{Log } \alpha + \frac{\varepsilon^2}{2} \alpha^{\theta \varepsilon} (\text{Log } \alpha)^2), \quad 0 < \theta < 1$$

$$\text{Donc } \alpha^{1+\varepsilon} \geq \alpha + \varepsilon \alpha \text{Log } \alpha \geq \alpha - \frac{\varepsilon}{e}.$$

Donc si $f_\varepsilon \rightarrow \xi$ alors

$$|f_\varepsilon|^{1+\varepsilon} \geq |f_\varepsilon| - \varepsilon \times C^{\varepsilon}$$

Ce qui donne

$$\liminf \tilde{H}_\varepsilon(f_\varepsilon) \geq \tilde{H}(\xi)$$

D'où l'hypothèse $\beta 2)$.

Enfin le fait que $H_0^2(0, a)$ soit uniformément convexe entraîne l'hypothèse $\beta 3)$.

On applique alors le Théorème 2.1. \square

La fonctionnelle $\tilde{J}_\varepsilon(\tilde{u}) = \tilde{G}(\tilde{u}) + \tilde{H}_\varepsilon(\tilde{u})$ est maintenant différentiable au sens de Gateaux et nous pouvons maintenant appliquer le Théorème 2.1. D'où la

PROPOSITION 3.3. 1) $\forall \varepsilon > 0 \exists u_\varepsilon \in X$ unique solution de

$$(3.8) \quad J'(u_\varepsilon) = \frac{d^4 u_\varepsilon}{dx^4} + (1 + \varepsilon) \text{sgn}(u_\varepsilon) |u_\varepsilon|^\varepsilon \|u_\varepsilon\|_{L^{1+\varepsilon}(0, a)}^{1+\varepsilon} = 0$$

avec $X = \{u \in H^2(0, a), u_\varepsilon(0) = 0, u'_\varepsilon(0) = 1\}$.

2) Quand $\varepsilon \rightarrow 0$, u_ε converge fortement dans $H^2(0, a)$ vers u solution de (3.1), (3.2), (3.3).

DÉMONSTRATION. D'après le Théorème 1.1 toute solution \tilde{u}_ε de (3.6) est solution dans $H_0^2(0, a)$ de l'Équation

$$(3.9) \quad \tilde{J}'_\varepsilon(\tilde{u}_\varepsilon) = 0$$

et réciproquement. Si on pose $u = \tilde{u} + g$, le problème (3.9) équivaut alors à

$$(3.10) \quad u_\varepsilon \in X, (J'_\varepsilon(u_\varepsilon), v - u_\varepsilon) \geq 0 \quad \forall v \in X$$

où

$$X = \{v \in H^2(0, a) \mid u(0) = 0, \quad u'(0) = 1\}$$

et J'_ε est la dérivée de Gateaux de

$$J_\varepsilon(u) = \int_0^a |u''|^2 dx + \left(\int_0^a |u|^{1+\varepsilon} dx \right)^2.$$

Le problème (3.10) est alors équivalent à (3.8). \square

Discretisation du problème. On se donne un paramètre $h > 0$ destiné à tendre vers 0.

Soit N un entier tel que $Nh = a$. On divise l'intervalle $(0, a)$ en N intervalles $(0, h), (h, 2h) \dots ((N-1)h, Nh)$. Soit θ_h^i la fonction caractéristique de $]ih, (i+1)h[$, $i = 0, \dots, N-1$.

Posons

$$\nabla u_h(x) = \frac{u_h(x + h/2) - u_h(x - h/2)}{h}$$

$$\nabla^2 u_h = \nabla(\nabla u_h) \quad \text{et} \quad \nabla^p u_h = \nabla(\nabla^{p-1} u_h) \quad p = 2, 3, \dots$$

où $u_h \in V_h$ espace de dimension finie de la forme:

$$V_h = \left\{ u_h \mid u_h = \sum_{i=0}^{N-1} u_h^i \theta_h^i, u_h^i \in \mathbb{R}, u_h^0 = u_h^{N-1} = 0, \nabla u_h(0) = 1 \right\}$$

comme dans M. Sibony [9] [10] (cf. aussi J. P. Aubin [1]) on montre qu'il existe un prolongement linéaire continue $p_h \in \mathcal{L}(V, V_h)$ tel que $p_h u_h^{(\varepsilon)} \rightarrow u_\varepsilon$ fortement quand $h \rightarrow 0$, u_ε étant la solution de (3.8) et $u_h^{(\varepsilon)}$ étant la solution du problème

$$(3.11) \quad u_h^{(\varepsilon)} \in V_h, \quad A_h u_h^{(\varepsilon)} = 0 \quad \text{avec}$$

$$(3.12) \quad A_h u_h^{(\varepsilon)} = \nabla^4 u_h^{(\varepsilon)} + (1 + \varepsilon) \operatorname{sgn}(u_h^{(\varepsilon)}) |u_h^{(\varepsilon)}|^\varepsilon \|u_h^{(\varepsilon)}\|_{L^{1+\varepsilon}(0, a)}^{1+\varepsilon}$$

L'équation (3.11) (3.12) est le problème discrétisé de (3.8).

Résolution numérique à l'aide d'une méthode itérative. Pour simplifier les notations nous désignerons par u_i la restriction de $u_h^{(\varepsilon)}$ à l'intervalle $[ih, (i+1)h[$ et nous supprimons les indices ε et h .

Le problème (3.11), (3.12) revient alors à chercher une suite (u_i) $i = 0, \dots, N-1$ solution de

$$(3.13) \quad Au_i = u_i^{(4)} + (1 + \varepsilon) \operatorname{sgn}(u_i) |u_i|^\varepsilon \|u_i\|_{L^{1+\varepsilon}}^{1+\varepsilon} = 0$$

avec les conditions aux limites:

$$(3.14) \quad u_0 = 0, \quad \nabla u_0 = 1$$

$$(3.15) \quad u_N = 0, \quad \nabla u_N = 0 \quad \text{pour } N \text{ suffisamment grand.}$$

Posons maintenant

$$u = v + \tilde{u} \quad \text{avec} \quad \tilde{u} = x \left(\frac{a-x}{a} \right)^2$$

Le problème (3.13), (3.14), (3.15) revient alors à résoudre dans $H_0^2(0, a)$ l'équation

$$(3.16) \quad Av = v^{(4)} + (1 + \varepsilon) \operatorname{sgn}(v + \tilde{u}) |v + \tilde{u}|^\varepsilon \|v + \tilde{u}\|_{L^{1+\varepsilon}}^{1+\varepsilon} = 0.$$

Nous résolvons alors l'équation (3.16) à l'aide de la méthode itérative bien connue de Gauss-Seidel (cf. R. S. Varga [12])

$$(3.17) \quad v_i^{n+1} = v_i^n - \rho(6v_i^n + v_{i+2}^n - 4v_{i+1}^n + \phi(v_i^n) + v_{i-2}^{n+1} - 4v_{i-1}^{n+1})$$

avec

$$\phi(v_i) = (1 + \varepsilon)h^4 \operatorname{sgn}(v_i + \tilde{u}_i) |v_i + \tilde{u}_i|^\varepsilon \|v + \tilde{u}\|_{L^{1+\varepsilon}}^{1+\varepsilon}$$

Résultats numériques. Nous avons constaté que la solution u de (3.3) avait son support dans $(0, a)$ avec $a < 4$.

Les itérations (3.17) ont été exécutées pour un pas $h_0 = 1/5$ jusqu'à stabilisation des résultats en w^0 . On désigna alors par \tilde{w}_0 l'interpolée de w_0 pour un pas $h_1 = 1/10$. Nous effectuons alors les itérations (3.17) en posant $v_i^0 = \tilde{w}_i^0$. A la limite on obtient la solution w^1 qu'on interpole en \tilde{w}^1 . On répète le processus jusqu'au pas $h = 1/80$ pour lequel nous obtenons la solution finale u . Pour $\varepsilon = 10^{-2}$ fixé, nous obtenons:

$$\alpha = \operatorname{Inf} J(v) = J(u) = 1,692.$$

Dans [2] L. D. Bercovitz et H. Pollard trouvent par d'autres méthodes le résultat suivant:

$$1,675 < \alpha < 1,745.$$

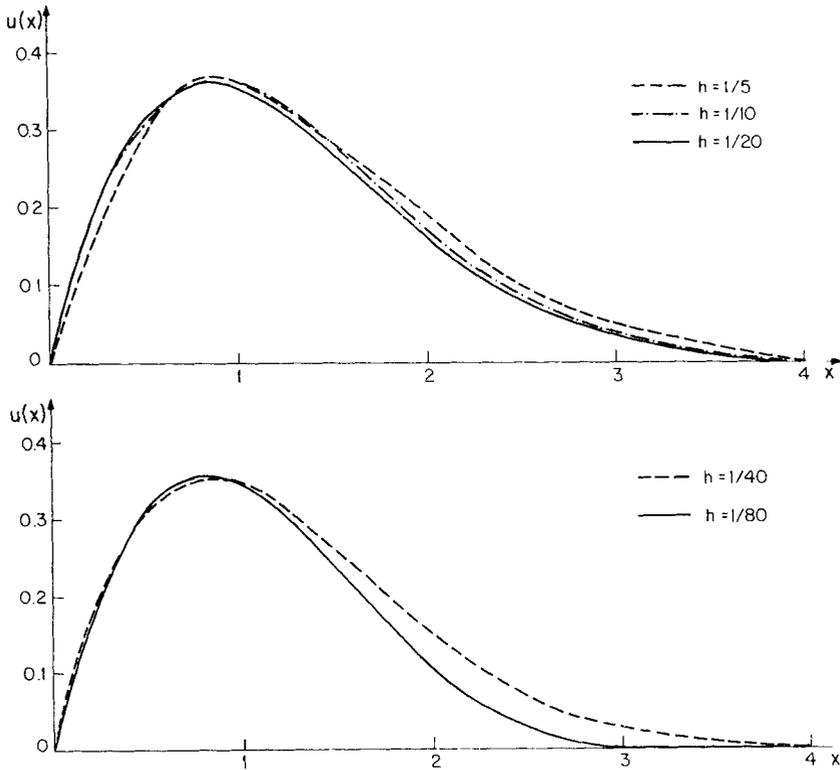


Fig. 1

Les courbes No. 1 donnent les valeurs de la fonction $u_h(x)$, $x \in [0, 4]$ pour les pas de discrétisations

$$h_0 = 1/5, \quad h_1 = 1/10, \quad h_2 = 1/20, \quad h_3 = 1/40 \quad \text{et} \quad h_4 = 1/80.$$

Les résultats sont identiques pour diverses valeurs du paramètre ρ d'accélération (et en particulier pour $\rho = 1$). La stabilisation est néanmoins obtenue après un nombre d'itérations plus ou moins grand fonction de la valeur donnée à ρ .

REMARQUE 3.1. Le problème (3.1), (3.2), (3.3) peut aussi se mettre sous la forme (cf. théorème 3.1 de [9] et [8])

$$(3.18) \quad (A_1 u_1, v_1 - u_1) \geq (f_1, v_1 - u_1) \quad \forall v_1 \in X_1$$

où

$$u_1 = (u, \lambda) \in X \times \mathbb{R}, \quad v_1 = (v, \mu) \in X \times \mathbb{R}$$

$$A_1 u_1 = \left(2 \frac{d^4 u}{dx^4}, 0 \right); \quad f_1 = (0, -1)$$

et

$$X_1 = \{v_1 \mid v_1 = (v, \mu) \in X \times \mathbb{R}; \left(\int_0^\infty |v| dx \right)^2 \leq \mu\}$$

On pourra alors appliquer les méthodes itératives de [10] pour résoudre (3.18).

Les courbes No. 2 donnent l'évolution de $J_{\varepsilon, h}(u_{\varepsilon, h}^n)$ pour $\varepsilon = 10^{-4}$ en fonction de n pour $h = h_0, h = h_1, h = h_2, h = h_3, h = h_4$. En particulier nous voyons que $J_{\varepsilon, h}(u_{\varepsilon, h}^n)$ croît vers la limite α quand $n \rightarrow \infty$ et quand $h \rightarrow 0$.

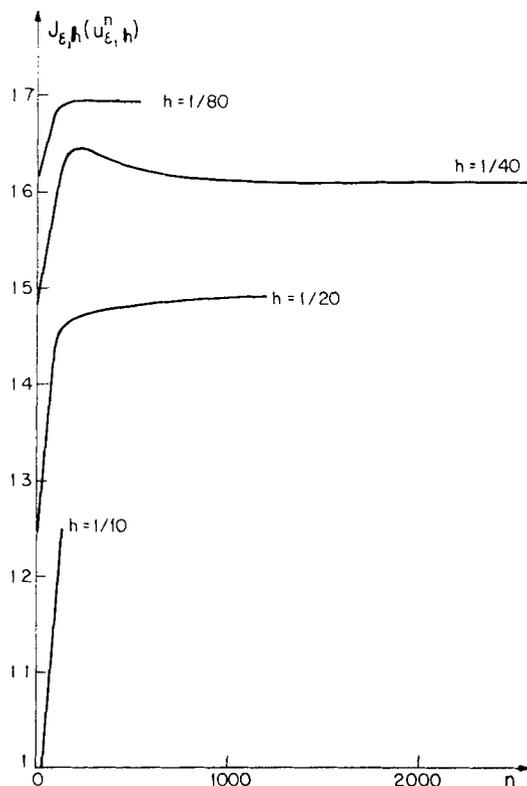


Fig. 2

4. Application II: résolution numérique d'un problème de Visco-élasticité. Soit Ω un ouvert borné de \mathbb{R}^n de frontière Γ suffisamment régulière. On pose

$$H_0^1(\Omega) = \{u \in L^2(\Omega), D_i u \in L^2(\Omega), \quad i = 1, \dots, n; u|_{\Gamma} = 0\}$$

les dérivées étant prises au sens des distributions.

On se propose de minimiser dans $H_0^1(\Omega)$ la fonctionnelle non différentiable

$$(4.1) \quad J(v) = \alpha \int_{\Omega} |\text{grad } v|^2 dx + \beta \int_{\Omega} |\text{grad } v| dx - 2(f, v)$$

avec

$$\alpha, \beta > 0; (f, v) = \int_{\Omega} f(x)v(x) dx.$$

PROPOSITION 4.1. 1) Il existe $u \in H_0^1(\Omega)$ unique tel que

$$(4.2) \quad J(u) \leq J(v) \quad \forall v \in H_0^1(\Omega)$$

2) On pose

$$(4.3) \quad J_{\varepsilon}(v) = \alpha \int_{\Omega} |\text{grad } v|^2 dx + \beta \int_{\Omega} |\text{grad } v|^{1+\varepsilon} dx - 2(f, v)$$

alors pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $u_{\varepsilon} \in H_0^1(\Omega)$ unique tel que

$$(4.4) \quad J_{\varepsilon}(u_{\varepsilon}) \leq J_{\varepsilon}(v) \quad \forall v \in H_0^1(\Omega)$$

3) De plus on a $u_{\varepsilon} \rightarrow u$ dans $H_0^1(\Omega)$ fort quand $\varepsilon \rightarrow 0$.

DÉMONSTRATION. 1) La fonctionnelle $J(v)$ est s.c.i.; strictement convexe sur $H_0^1(\Omega)$ muni de la norme $\|u\| = (\int_{\Omega} |\text{grad } u|^2 dx)^{1/2}$.

Il vient alors

$$\frac{J(u)}{\|u\|} \geq \alpha \|u\| - \frac{2(f, u)}{\|u\|} \geq \alpha \|u\| - 2\|f\|^{*}$$

D'où $\lim_{\|u\| \rightarrow \infty} J(u) = +\infty$. D'où l'assertion.

2) On raisonne comme dans 1).

3) Posons $J = G + H$: $J_{\varepsilon} = G + H_{\varepsilon}$

où

$$G(v) = \alpha \int_{\Omega} |\text{grad } v|^2 dx - 2(f, v); \quad H(v) = \int_{\Omega} |\text{grad } v| dx;$$

$$H_{\varepsilon}(v) = \beta \int_{\Omega} |\text{grad } v|^{1+\varepsilon} dx.$$

On vérifie facilement l'hypothèse $\beta 1$).

Posons $v_{\varepsilon} = |\text{grad } v|^{1+\varepsilon}$ on a:

$$v_{\varepsilon} \rightarrow |\text{grad } v| \text{ p.p.}; \quad |v_{\varepsilon}| \leq \max(|\text{grad } v|^2, 1)$$

On en déduit que $H_{\varepsilon}(v) \rightarrow H(v) \forall v \in H_0^1(\Omega)$.

De l'inégalité (3.7) on déduit que $H_\varepsilon(u_\varepsilon) \geq H(u_\varepsilon) - \varepsilon k$ où k est une constant positive. Donc $\liminf H_\varepsilon(u_\varepsilon) \geq H(u)$. D'où l'hypothèse β_2 .

Enfin comme $H_0^1(\Omega)$ est uniformément convexe pour la norme $\|u\|$, on en déduit β_3). D'où la proposition.

REMARQUE 4.1. D'après le théorème 3.1 dans [9] le problème (4.2) est équivalent à

$$(4.5) \quad (f - F_1'(u) \cdot v - u) \leq F_2(v) - F_2(u) \quad \forall v \in H_0^1(\Omega).$$

avec

$$F_1(u) = \frac{\alpha}{2} \int_{\Omega} |\text{grad } u|^2 dx$$

$$F_2(u) = \frac{\beta}{2} \int_{\Omega} |\text{grad } u| dx$$

Le problème (4.5) peut alors se mettre sous la forme (cf. aussi U. Mosco [8])

$$(4.6) \quad (A_1 u_1, v_1 - u_1) \geq (f_1, v_1 - u_1) \quad \forall v_1 \in X_1$$

avec

$$u_1 = (u, \lambda) \in H_0^1(\Omega) \times \mathbb{R}$$

$$f_1 = (f, -1)$$

$$A_1 u_1 = A_1(u, \lambda) = (F_1'(u), 0) = (-\alpha \Delta u, 0)$$

et

$$X_1 = \{v_1 \mid v_1 = (v, u) \in H_0^1 \times \mathbb{R}, F_2(v) \leq \mu\} \quad \square$$

Le problème (4.3), (4.4) peut aussi se ramener à la résolution d'une équation non linéaire. Plus précisément nous avons la

PROPOSITION 4.2. *Toute solution u_ε de (4.3), (4.4) est solution de l'équation*

$$(4.5) \quad A_\varepsilon u_\varepsilon = f$$

avec

$$A_\varepsilon u_\varepsilon = -\alpha \Delta u_\varepsilon - \frac{\beta(1 + \varepsilon)}{2} \sum_{i=1}^n D_i(|\text{grad } u_\varepsilon|^{\varepsilon-1} D_i u_\varepsilon)$$

et réciproquement.

DISCRÉTISATION. Soit $h = (h_1, \dots, h_n) \in \mathbb{R}_+^n$ un paramètre destiné à tendre vers 0. Nous désignerons par \mathfrak{R}_h le réseau régulier des points M de la forme $M = (m_1 h_1, \dots, m_n h_n) m_i \in \mathbb{Z}$. Pour simplifier prendrons $h_i = h_j = h \forall i, j = 1, \dots, n$.

Posons

$$\omega_{h,q}^M = \prod_{i=1}^n \left[\left(m_i - \frac{q_i + 1}{2} \right) h_i, \left(m_i + \frac{q_i + 1}{2} \right) h_i \right]$$

$q = (q_i)_{1 \leq i \leq n}$ entier positif. $|q| = \sum_{i=1}^n q_i$ et

$$\rho_h^M = \bigcup_{|q| \leq 1} \omega_{h,q}^M$$

$$\Omega'_h = \{M \mid M \in \mathfrak{R}_h, \rho_h^M \subset \Omega\}$$

Enfin

$$\Omega_h = \bigcup_{M \in \Omega'_h} \omega_{h,0}^M$$

Comme dans [3], [9] (cf. aussi [1]) nous associons à l'espace $V = H_0^1(\Omega)$ l'espace de dimensions finie des suites $u_h = (u_h^M)_{M \in \Omega'_h}$

On pose $u_h(x) = u_h^M$ si $x \in \omega_{h,0}^M$.

Posons

$$\nabla_i u_h(x) = \frac{u_h(x + h_i/2) - u_h(x - h_i/2)}{h_i}$$

$$\nabla_i^2 u_h = \nabla_i(\nabla_i u_h).$$

On sait qu'il existe un prolongement injectif $p_h \in \mathcal{L}(V_h, V)$. On munit alors V_h de la norme $\|u_h\|_h = \|p_h u_h\| \quad \forall u_h \in V_h$.

Ce qui donne

$$\|u_h\|_h = \left(\sum_{i=1}^n \|\nabla_i u_h\|_{L^2}^2 \right)^{1/2}$$

Nous démontrons facilement la

PROPOSITION 4.3. 1) Il existe $u_{\varepsilon,h} \in V_h$ unique solution de l'équation

$$(4.7) \quad A_{\varepsilon,h} u_{\varepsilon,h} = f_h$$

avec

$$A_{\varepsilon,h} u_{\varepsilon,h} = -\alpha \sum_{i=1}^n \nabla_i^2 u_{\varepsilon,h} - \frac{\beta(1 + \varepsilon)}{2} \sum_{i=1}^n \nabla_i (|\nabla_h u_{\varepsilon,h}|^{\varepsilon-1} \nabla_i u_{\varepsilon,h})$$

avec

$$\nabla_h u_{\varepsilon,h} = \left(\sum_{i=1}^n |\nabla_i u_{\varepsilon,h}|^2 \right)^{1/2}$$

et f_h étant le discrétisé de f .

2) Il existe un prolongement $p_h \in \mathcal{L}(V_h, V)$ tel que $p_h u_{\varepsilon,h} \rightarrow u_\varepsilon$ dans V fort quand $h \rightarrow 0$, u_ε étant la solution de (4.5).

Nous pouvons aussi résoudre le problème (4.3), (4.4) en discrétisant directement la fonctionnelle J_ε donnée par (4.3). Nous résoudrons ensuite le nouveau problème posé dans un espace de dimension finie V_h à l'aide d'une méthode directe.

Plus précisément nous avons la

PROPOSITION 4.4. 1) Pour tout $\varepsilon > 0$ fixé, $\exists u_{\varepsilon,h} \in V_h$ unique tel que

$$(4.8) \quad J_h(u_{\varepsilon,h}) \leq J_h(v_h) \quad \forall v \in V_h$$

avec

$$(4.9) \quad J_h(v_h) = \alpha \int_{\Omega} \sum_{i=1}^n |\nabla_i v_h|^2 dx + \beta \int_{\Omega} \left(\sum_{i=1}^n |\nabla_i v_h|^2 \right)^{(1+\varepsilon)/2} dx - 2 \int_{\Omega} f_h v_h dx$$

2) De plus on a $p_h u_{\varepsilon,h} \rightarrow u_\varepsilon$ quand $h \rightarrow 0$ dans $V = H_0^1(\Omega)$ fort; u_ε étant la solution du problème (4.3), (4.4).

3) Le problème (4.8), (4.9) peut alors être résolu à l'aide de la "Méthode de la Mire". (Cf. §5 et M. Sibony [9]).

5. Minimisation de fonctionnelle: une méthode directe. Pour la commodité du lecteur nous rappelons la "Méthode de la Mire" que nous avons introduit dans [9]. Dans le paragraphe 6 nous allons appliquer cette méthode pour résoudre numériquement quelques problèmes de la Mécanique.

Plus généralement soit X un convexe fermé de \mathbb{R}^n . On se propose d'approcher $x \in X$ solution du problème:

$$(5.1) \quad F(x) \leq F(y) \quad \forall y \in X$$

NOTATIONS. Soit ρ un paramètre positif destiné à tendre vers 0.

Pour $x \in X$ $x = (x_1, \dots, x_n)$ on note:

$$e_1 = (1, 0, \dots, 0); \quad e_2 = (0, 1, \dots, 0); \quad e_i = (0, \dots, 1, \dots, 0)$$

$$M_{x,\rho} = \left\{ \bigcup_{\substack{i=1 \\ \varepsilon=0,1,-1}}^n x + \varepsilon \rho e_i \right\}$$

c'est la mire de centre x et de rayon ρ . On désigne par $E(M_{x,\rho}) = \{ \bigcup_{i=1}^n \{ x + \varepsilon \rho e_i \} \}$ l'ensemble des extrémités de la mire

Mire de type I. On désigne par $x^p = (x_1^p, \dots, x_n^p)$ le point générique $x = (x_1, \dots, x_n)$ à l'itération p et par ρ_p la valeur du paramètre ρ à l'itération p . On dira que M_{x^p, ρ_p} est de type I, s'il existe $y \in E(M_{x^p, \rho_p})$ tel que $F(y) < F(x^p)$ (i.e. si le minimum sur la mire est un point de l'extrémité).

Mire de type II. On dira que M_{x^p, ρ_p} est de type II si $\forall y \in E(M_{x^p, \rho_p})$ on a $F(y) \geq F(x^p)$ (i.e. le minimum est au centre de la mire).

1) Si M_{x^i, ρ_i} est de type I, on pose $x^{i+1} = l'$ un des points de $E(M_{x^i, \rho_i})$ où le minimum est atteint et $\rho_{i+1} = \rho_i$.

2) Si M_{x^i, ρ_i} est de type II alors soit Γ_i la mire dont l'une des extrémités est x^i ; une autre étant l'un des points $y \in E(M_{x^i, \rho_i})$ où F atteint son minimum sur $E(M_{x^i, \rho_i})$. Le rayon de Γ_i est alors $\rho = \rho_i/2$.

Nous avons alors deux cas

α) Si Γ_i est de type I on pose

$$x^{i+1} = \frac{x^i + g}{2} \quad \text{et} \quad \rho_{i+1} = \frac{\rho_i}{2}$$

ce qui définit $M_{x^{i+1}, \rho_{i+1}}$.

β) Si Γ_i est de type II, on pose alors $M_{x^{i+1}, \rho_{i+1}} = M_{x^i, \rho_i/2}$.

La technique consiste donc en ceci: si M_{x^i, ρ_i} est de type I on poursuit le procédé et au bout d'un nombre fini d'itérations (car trouver la solution sur X non borné est équivalent à trouver la solution dans $K = \{y \in X \mid F(y) \leq F(y_0), y_0 \text{ fixé dans } X\}$ qui est un convexe borné de \mathbb{R}^n cf. M. Sibony [9]) la mire devient de type II qu'on quitte en deux coups au plus après avoir diminué le paramètre ρ . On reprend alors la recherche du minimum avec une mire de type I.

Si certains points de la mire M_{x^i, ρ_i} n'appartiennent pas au convexe X , on n'en tiendra pas compte même si F est défini sur tout \mathbb{R}^n .

On désigne maintenant par C_{ξ^n, ρ_n} la suite infinie des mires de types II de centre ξ^n et de rayon ρ_n .

On démontre alors la

PROPOSITION 5.1.* Soit $F: X \rightarrow \mathbb{R}$ strictement convexe, s.c.i. et tel que $\lim_{\|x\| \rightarrow \infty, x \in X} F(x) = +\infty$. Alors, il existe $x \in X$ unique solution de (5.1). Si F est de classe C^1 dans un voisinage de X alors $\xi^n \rightarrow x$ quand $n \rightarrow \infty$, ξ^n étant les centres des mires de type II.

6. Applications numériques.

EXEMPLE 1. Résolution numérique d'un problème de visco-élasticité.

On se propose ici de résoudre numériquement le problème (4.8), (4.9) à l'aide de la méthode de la Mire introduite au paragraphe précédent.

Soient $\Omega = (0, 1) \times (0, 1) \subset \mathbb{R}^2$ et $h_1 = h_2 = h$.

* Ce résultat est démontré dans [9] pour $X = \mathbb{R}^n$.

Si on pose $N = 1/h$, le nombre de points du réseau associé à Ω sera alors $(N + 1)^2$.

On note par $\{u_{i,j}\}$ $i, j = 1, \dots, N + 1$ les valeurs de u_h , solution du problème (4.8), (4.9) aux points $M = (i, j)$ du réseau \mathfrak{R}_h . Le problème consiste alors à trouver une suite $\{u_{i,j}\}$ telle que

$$(6.1) \quad J_{\varepsilon,h}(\{u_{i,j}\}) \leq J_{\varepsilon,h}(\{v_{i,j}\})$$

avec les conditions

$$(6.2) \quad \begin{cases} u_{1,i} = u_{N+1,i} = 0 & \text{pour } 1 \leq i \leq N + 1 \\ u_{j,1} = u_{j,N+1} = 0 & \text{pour } 1 \leq j \leq N + 1 \end{cases}$$

avec

$$(6.3)^* \quad J_{\varepsilon,h}(\{u_{i,j}\}) \simeq \sum_{i,j=2}^N \left\{ \frac{1}{4}(u_{i+1,j} - u_{i-1,j})^2 + (u_{i,j+1} - u_{i,j-1})^2 \right. \\ \left. + \frac{h}{2} [(u_{i+j,1} - u_{i-1,j})^2 + (u_{i,j+1} - u_{i,j-1})^2]^{(1+\varepsilon)/2} \right\} \square$$

Nous pouvons réduire le nombre d'opérations dans le programme de minimisation de $J_{\varepsilon,h}(\{u_{i,j}\})$ en procédant de la manière suivante: Pour ne pas calculer $J_{\varepsilon,h}(\{u_{i,j}\})$ à l'aide des formules (6.3) à chaque sommet de mire (type I ou II) nous pouvons exprimer $J_{\varepsilon,h}(\dots, u_{ij} + t, \dots)$ en fonction de $J_{\varepsilon,h}(\dots, u_{ij}, \dots)$. \square

La rapidité de la convergence de la méthode de la mire vers la solution dépend bien entendu de la valeur initiale de $\{u_{ij}\}^0$.

Ici nous prenons $u_{ij}^0 = 16(x - x^2)(y - y^2)$, $(x, y) \in (0, 1) \times (0, 1)$ qui vérifie a priori les conditions aux limites (6.2).

Résultats numériques 1) Pour $h = 0,2$, $N = 5$, $\varepsilon = 10^{-6}$ nous obtenons

$$(6.4) \quad \alpha_\rho = \text{Sup}_{i,j} |u_{h,\rho}(i,j)| = 5,10 \cdot 10^{-7} \quad \text{et} \quad J_{\varepsilon,h,\rho}(u_{h,\rho}) = 6,8 \cdot 10^{-7}.$$

La courbe No. 3 donne l'évolution α_ρ en fonction du paramètre ρ rayon de la mire de type II.

2) Pour $h = 10^{-1}$, $N = 11$, $\varepsilon = 10^{-6}$ nous obtenons

$$(6.5) \quad \beta_\rho = \text{Sup}_{i,j} |u_{h,\rho}(i,j)| = 6,5 \cdot 10^{-6} \quad \text{et} \quad J_{\varepsilon,h,\rho}(u_{h,\rho}) = 4,3 \cdot 10^{-6}.$$

La courbe No. 4 donne l'évolution de β_ρ en fonction du paramètre ρ .

La solution $u_{h,\rho}(i,j)$ et $J_{h,\rho}(u_{h,\rho})$ sont donc égales à 0 dans les deux cas.

Ce qui montre la convergence de la méthode. \square

* Nous voulons effectuer l'expérience numérique avec $f_h = 0$ dans (4.9) car dans ce cas seulement nous pourrions comparer la solution numérique obtenue, avec la solution évidente du problème (4.2); qui pour $f = 0$, est $u = 0$ et $J(u) = 0$.

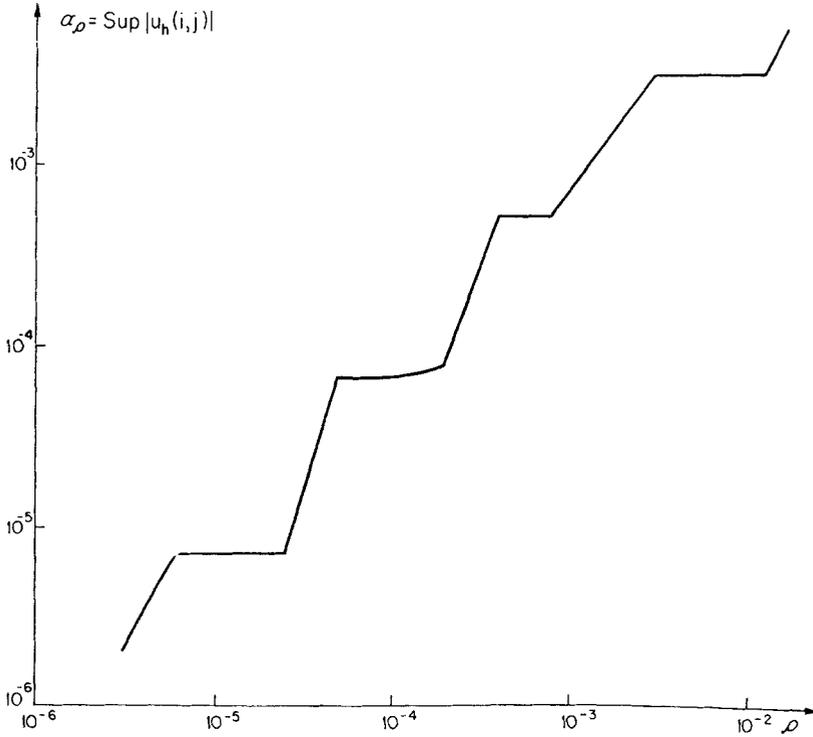


Fig. 3

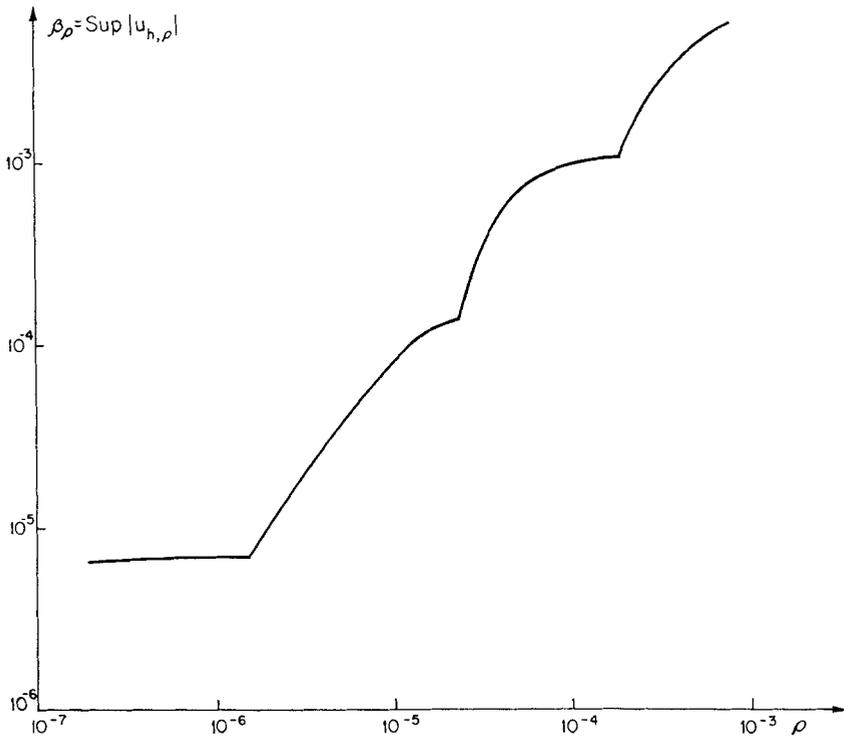


Fig. 4

EXEMPLE 2. Résolution numérique d'un problème de Programmation dynamique.

Soit $x \in (1, e)$. On cherche

$$(6.6) \quad u(x) \in X = \{v \in H^1(]1, e[) \mid v(1) = 2, v(e) = 1\}$$

vérifiant

$$(6.7) \quad J(u) \leq J(v) \quad \forall v \in X \quad \text{avec}$$

$$(6.8) \quad J(v) = \frac{1}{2} \int_1^e x v'^2(x) dx$$

Le problème (6.6), (6.7), (6.8) est traité dans [4] par d'autres méthodes. \square

On se propose ici de résoudre ce problème de 3 manières:

1) **Résolution explicite.** Posons

$$v = w + 2 - \frac{x-1}{e-1}, \quad u = u_0 + 2 - \frac{x-1}{e-1}$$

Le problème (6.6), (6.7), (6.8) équivaut alors à résoudre:

$$(6.9) \quad G(u_0) \leq G(w) \quad \forall w \in H_0^1(]1, e[)$$

avec

$$(6.10) \quad G(v) = \frac{1}{2} \int_1^e x \left(v'(x) - \frac{1}{e-1} \right)^2 dx$$

Nous avons alors la

PROPOSITION 6.1. La solution $u \in X$ de (6.6), (6.7), (6.8) est donnée par

$$(6.11) \quad u(x) = 2 - \text{Log } x, \quad x \in (1, e) \quad \text{et} \quad J(u) = 1/2$$

DÉMONSTRATION. Toute solution de (6.9), (6.10) est solution de

$$(6.12) \quad (G'(u_0), v - u_0) \geq 0 \quad \forall v \in H_0^1(]1, e[)$$

(G' étant la dérivée de Gateaux de G) ou de

$$(6.13) \quad \begin{cases} G'(u_0) = \frac{d}{dx} \left\{ x \left(u_0' - \frac{1}{e-1} \right) \right\} = 0 \quad \text{dans } \mathcal{D}'(]1, e[) \\ u_0(1) = u_0(e) = 0. \end{cases}$$

et réciproquement

* Quand la fonctionnelle J est différentiable, nous donnons à titre d'exemple quelques méthodes pour résoudre numériquement le problème de minimisation correspondant.

De (6.13) on déduit

$$(6.14) \quad u_0(x) = \frac{x-1}{e-1} - \text{Log } x$$

D'où

$$(6.15) \quad u(x) = 2 - \text{Log } x \quad \text{et} \quad J(u) = 1/2.$$

2) Résolution du problème à l'aide d'une méthode itérative.

Posons

$$(6.16) \quad (Au_0, w) = (G'(u_0), w) = \int_1^e x \left(u_0' - \frac{1}{e-1} \right) w' dx$$

on en déduit les inégalités.

$$(6.17) \quad (Au_0 - Av_0, u_0 - v_0) \geq \|u - v\|_{H_0^1}^2 \quad \text{où} \quad \|u\|_{H_0^1} = \|u'\|_{L^2}$$

$$(6.18) \quad (Au_0 - Av_0, w) \leq e \|u - v\|_{H_0^1} \|w\|_{H_0^1} \quad \forall w \in H_0^1(]1, e[)$$

PROPOSITION 6.2. La suite $(u_0^n)_n$ défini par les itérations (cf. [3])

$$(6.19) \quad u_0^{n+1} = u_0^n - \rho S^{-1} Au_0^n \quad \text{avec}$$

$$(6.20) \quad S = -\frac{d^2}{dx^2}, \quad \rho = 1/e^2, \quad u_0^{(0)}$$

quelconque converge vers u_0 solution de (6.9), (6.10) dans $H_0^1(]1, e[)$ fort quand $n \rightarrow \infty$.

La solution u solution de (6.6), (6.7), (6.8) est donnée par

$$(6.21) \quad u = u_0 + 2 - \frac{x-1}{e-1} = 1 - \frac{x-1}{e-1} + \lim_{n \rightarrow \infty} u_0^n.$$

Résultats numériques. Pour un pas de discrétisation $h = 1/20$ et $h = 1/40$ la méthode (6.19) conduit au bout d'une vingtaine d'itérations à la solution u donnée par (6.15) avec $\lim_{n \rightarrow \infty} J_h(u_h^n) = 0.5$.

3) Résolution avec la Méthode de la Mire. — Pour un pas $h = 1/20$ de discrétisation nous obtenons un graphe de $u_{h,\rho}(x)$ confondu avec celui de $u(x)$ donné par (6.15) et

$$\lim_{\rho \rightarrow 0} J_{h,\rho}(u_{h,\rho}) = 0.486.$$

Pour $h = 1/40$ nous avons par contre

$$\lim_{\rho \rightarrow 0} J_{h,\rho}(u_{h,\rho}) = 0.499.$$

REMARQUE 6.1. Nous avons aussi appliqué avec succès le Méthode de la Mire au problème suivant:

On cherche $u \in X = \{v \mid v(0) = \beta, v(1) = 1, v' \geq 0\}$ solution de

$$(6.22) \quad J(u) \leq J(v) \quad \forall v \in X$$

avec

$$J(v) = \frac{\int_0^1 v \left(v'^3 + \frac{\sigma}{\tau^3} \right) dx + \frac{2\beta^2}{\tau^2}}{\int_0^1 v^2 dx}$$

où σ, τ, β sont des constantes données.

Le facteur balistique d'un missile est proportionnel au coefficient de qualité donné par la valeur optimal $J(u)$ solution du problème (6.22)..

Pour ce même problème cf. John C. Heideman [5] qui procède par d'autres méthodes; voir aussi Angelo Miele et Ho-Yi Huang [6] pour le cas particulier où $\tau = 1, \beta = 0$.

Le problème (6.22) illustre le cas de problèmes pratiques où il est difficile de se rendre compte de la différentiabilité de la fonctionnelle et l'étude mathématique du problème devient vite inextricable. Pour ce genre de problème la méthode de la mire peut rendre quelques services dans la mesure où elle aboutit à des résultats numériques concrets.

Les résultats numériques obtenus par la méthode de la mire pour le problème (6.22) dépassent le cadre de ce travail.

BIBLIOGRAPHIE

1. J. P. Aubin, *Approximation des espaces de distributions et des opérateurs différentiels*, Bull. Soc. Math. France, **12** (1967), 139 p.
2. L. D. Bercovitz et H. Pollard, *A non-classical Variational Problem Arising from an Optimal Filter Problem*, Arch. Rational Mech. Anal., **26** (1967), No. 4.
3. H. Brezis et M. Sibony, *Méthodes d'approximation et d'itération pour les opérateurs monotones*, Arch. Rational Mech. Anal., **28** (1968) No. 1.
4. S. E. Dreyfus, *Dynamic programming and the Hamilton-Jacobi Method of classical Mechanics*, J. Optimization Theory Appl., **2** (1968), No. 1.
5. J. E. Heideman, *Blunt-nosed missile shapes of minimum ballistic factor*, J. Optimization Theory Appl., **1** (1967), No. 3.
6. J. L. Lions, *Problèmes aux limites dans les équations aux dérivées partielles*, Université de Montréal, 1962.

7. A. Miele and Ho-Yi Huang, *Missile shapes of minimum ballistic factor*, Optimization J. Theory Appl., **1** (1967) No. 2.
8. U. Mosco, *A remark on a theorem of F. E. Browder*, J. Math. Anal. Appl. **30** (1967), No. 1.
9. M. Sibony, *Sur l'approximation d'équations et inéquations aux dérivées partielles, non linéaires de type monotone*. (A paraître dans J. Math. Anal. Appl.).
10. M. Sibony, *Méthodes itératives pour les équations et inéquations aux dérivées partielles non linéaires de type monotone* (A paraître dans Colcolo).
11. M. Sibony, *Contrôle des systèmes gouvernés par des équations aux dérivées partielles*. (A paraître dans Rend. Sem. Mat. Univ. Padova tome 43).
12. R. S. Varga, *Matrix iterative analysis*, Prentice Hall.

134, AVENUE DE ROULE,
92-NEUILLY, FRANCE